Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2018/2019

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 9

Ausgabe: 12.12.2018
Abgabe: 19.12.2018

Aufgabe 9.1. (2 + 4 + 2 Punkte)

Im Max-Cut Problem ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ gegeben. Es ist eine Knotenmenge $W \subseteq V$ zu bestimmen, sodass die Anzahl *kreuzender* Kanten (also der Kanten mit genau einem Endpunkt in W) größtmöglich ist. Wir führen lokale Suche durch, sodass in jedem Schritt entweder ein Knoten zu W hinzugenommen wird oder ein Knoten aus W entfernt wird, falls dies die Anzahl der kreuzenden Kanten erhöht. Zeige, dass für jede lokal optimale Lösung folgendes gilt:

a) Für die inzidenten Kanten eines beliebigen Knotens gilt, dass die Anzahl der kreuzenden Kanten mindestens so groß ist wie die Anzahl der nicht-kreuzenden Kanten.

b) Es gibt insgesamt mindestens so viele kreuzende wie nicht-kreuzende Kanten.

c) Lokale Suche ist 2-approximativ für Max-Cut.

Aufgabe 9.2. *Lineare Programmierung* (6 Bonuspunkte)

a) Betrachte die LP-Relaxierung der IP-Formulierung des max-Sat-Problems und bestimme *alle optimalen* fraktionalen Lösungen für die folgenden Instanzen:

   (i) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$

   (ii) $(x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4)$

b) Betrachte den Algorithmus mit randomisiertem Runden (Algorithmus 3 im Skript). Für welche optimalen fraktionalen Lösungen für (ii) erhalten wir die höchste erwartete Anzahl erfüllter Klauseln?

Aufgabe 9.3. (4 Punkte)

Zeige, dass die Integralitätslücke für die IP- und LP-Formulierung des max-Sat-Problems aus der Vorlesung mindestens $\frac{4}{3}$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.4. *Dualität* (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Bestimme das duale LP (D) für das folgende primale LP (P):

$$\begin{array}{rrcr} \textit{minimiere} & 7x_1 - 11x_2, & & \\ \textit{sodass} & x_1 + 2x_2 & \geqslant & 1 \\ & 2x_1 + x_2 & = & 5 \\ & 3x_1 + x_2 & \leqslant & -5 \\ & x_1 & \leqslant & 0 \end{array}$$

Hinweis: Die Ungleichungen $(c_j - y^T a^j)x_j \geqslant 0\ \forall j$, und $y_i(a_i^T x - b_i) \geqslant 0\ \forall i$ können behilflich sein.

b) Sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten w_e gegeben. Das EDGE-COVER-Problem sucht eine Kantenmenge in G mit minimalem Gesamtgewicht, die alle Knoten überdeckt (Kantenüberdeckung).

Formuliere die LP-Relaxierung (P) dieses Problems. Die Bedingungen, dass alle Variablen höchstens 1 werden, darf man weglassen.

c) Formuliere das entsprechende duale Problem (D). Für welches Graphenproblem ist (D) eine LP-Relaxierung im Fall von uniformen Kantengewichten ($w_e = 1$ für alle $e \in E$)?

E-Mail: `{panni,mahyar}@ae.cs.uni-frankfurt.de`