Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2018/2019

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 8

Ausgabe: 05.12.2018
Abgabe: 12.12.2018

Aufgabe 8.1. *max*-INDEPENDENT-SET (3 + 5 Punkte)

a) Wir haben am Beispiel eines vollständigen Graphen gesehen, dass für (ungewichtetes) max-INDEPENDENT-SET die Integralitätslücke mindestens $\frac{n}{2}$ ist, wobei n die Knotenzahl des Eingabegraphen bezeichnet. Zeige, dass die Integralitätslücke genau (also auch höchstens) $\frac{n}{2}$ ist.

   Hinweis: Betrachte die Fälle OPT $= 1$ und OPT $\geqslant 2$ separat.

b) Entwirf einen optimalen Greedy Algorithmus für das ungewichtete max-INDEPENDENT-SET auf Bäumen. Begründe die Optimalität.

Aufgabe 8.2. *min*-SET COVER (5 Punkte)

Gegeben sei das Universum $U = \{1, 2, \ldots, n\}$. Bestimme Gewichte für die folgenden Mengen so, dass der Approximationsfaktor der gewichteten Variante des Greedy-Algorithmus für SET COVER (beliebig nah an) die n-te harmonische Zahl H_n ist:

$$S_0 = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$S_j = \{j\} \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3. *Matrix-Rang* (3 + 4 Punkte)

a) Die Determinante $\det(A)$ einer 2×2 Matrix A ist definiert als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Zeige, dass die beiden Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren) von A genau dann linear abhängig sind (d.h. $\operatorname{rang}(A) < 2$), wenn $\det(A) = 0$.

b) Welche der folgenden Matrizen ist vollständig unimodular? Gib jeweils eine *einfache* Begründung an. Der besseren Lesbarkeit wegen, wurde in der letzten Matrix ein Gitter eingefügt und 0-Einträge durch leere Zellen ersetzt.

$$i.)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad ii.)\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad iii.)\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline & & & & & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & & & & & \\ \hline & 1 & & & 1 & & & 1 & \\ \hline & & 1 & & & 1 & & & \\ \hline & & & & & & 1 & & 1 \end{array}\right)$$

Hinweis: Die notwendigen Informationen über vollständig unimodulare Matrizen wurden in der Vorlesung diskutiert.

E-Mail: `{panni,mahyar}@ae.cs.uni-frankfurt.de`