Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2018/2019

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 7

Ausgabe: 28.11.2018
Abgabe: 05.12.2018

Dies ist das letzte für den ersten Teil der Vorlesung (ApA1) relevante Übungsblatt.

Aufgabe 7.1. *Konvexe Mengen* (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für zwei beliebige Punkte $a, b \in K$ das verbindende Geradenstück $\{\lambda a + (1-\lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ auch vollständig in K enthalten ist.

Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Welche der folgenden Mengen sind in jedem Fall konvex?

a) $K_1 \cup K_2$, b) $K_1 \cap K_2$, c) $\overline{K_1} = \mathbb{R}^n \setminus K_1$, d) $K_1 \setminus K_2$, e) $K_2 \setminus \overline{K_1}$.

Gib jeweils eine *kurze* Begründung oder skizziere ein Gegenbeispiel in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 7.2. (4 + 3 + 3 Punkte)

a) Gib das folgende LP in kanonischer Form **und** in Standardform an:

$$\textit{maximiere } 7x_1 - 11x_2 \quad , \quad \textit{sodass}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 &\leq -5 \\ x_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

b) Skizziere (oder beschreibe) den Lösungspolyeder in $\mathbb{R}^3$ für die folegenden Nebenbedingungen (ein Beweis ist nicht erforderlich):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Gib für den Kostenvektor $c^T = (-1, -1, 0)$ jede minimale Ecke an. Argumentiere hierfür geometrisch oder berechne den Zielwert für jede Ecke.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3. (4 Punkte + 4 Bonuspunkte)

a) Fixiere ein Universum $U = \{1, 2, \ldots, m\}$. Für $i = 1, 2, \ldots, n$ seien die Teilmengen $S_i \subseteq U$ gegeben, wobei der Menge S_i das Gewicht w_i zugeordnet wird. Gesucht wird eine Auswahl der Teilmengen $C \subseteq \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit minimalem Gesamtgewicht, so dass jedes Element in U durch mindestens eine Menge in C überdeckt wird. Formuliere dieses Problem als ganzzahliges Programm (IP) und gib anschließend seine LP Relaxierung an.

b) **(Bonus)** Angenommen, jedes Element $j \in U$ ist in genau drei Teilmengen S_i enthalten. Beschreibe einen 3-approximativen Algorithmus mit deterministischem Runden der LP-Relaxierung. Begründe kurz die 3-Approximation und die Korrektheit der Ausgabe.

Aufgabe 7.4. (3 Punkte)

Das folgende Bild zeigt eine (nicht optimale) fraktionale Lösung für das Routing Problem mit einer Quelle s und einer Senke t. Bestimme eine Pfadzerlegung dieser Lösung gemäß dem in der Vorlesung besprochenen Algorithmus. Begründungen sind nicht notwendig.