Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2018/2019

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 6

Ausgabe: 21.11.2018
Abgabe: 28.11.2018

Aufgabe 6.1. (2 + 2 + 2 + 3 Punkte)

a) Seien $0 < k < n$ natürliche Zahlen. Gib eine **kurze kombinatorische** Begründung, warum die folgende bekannte Gleichheit in jedem Fall gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

b) In einer Instanz des Facility Location Problems sei die Anzahl der möglichen Service-Stationen $|S| = 10$. Wie viele verschiedene Lösungen gibt es für diese Instanz, wenn $X = \emptyset$ auch als Lösung zählt? Begründe die Antwort.
Wie ändert sich die Antwort, wenn $|S| = 20$ gilt?

c) Entscheide, ob die folgenden Aussagen RICHTIG oder FALSCH sind. Begründe jeweils die Antwort.

i) Eine lokale Suche für das k-Center Problem mit der 2-Flip Nachbarschaft hat immer polynomiell viele Verbesserungsrunden (in der Anzahl der Eingabepunkte $|K| = n$).

ii) Der Kernighan-Lin Algorithmus für min-Balanced Cut läuft in jeder Runde von einer Lösung W zur komplementären Lösung $V \setminus W$ (mit demselben Zielwert!) über $\frac{n}{2}$ Schritte. Die beste Lösung W' der Runde ist deshalb entweder $W' = W$ oder notwendigerweise eine lokal minimale Lösung.

Aufgabe 6.2. (1 + 3 + 1 Punkte)

Für jedes Dreieck (A, B, C) in der Ebene sei ein Gewicht $W(A, B, C)$ definiert, das einfach zu berechnen ist (z. B. Umfang, Länge der längsten Seite, Größe des größten Winkels oder Ähnliches).

Wir wollen für ein beliebiges konvexes Polygon, gegeben durch seine im Uhrzeigersinn aufgezählten n Eckpunkte $(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n)$, $n \geqslant 3$, eine Triangulierung (Zerlegung in Dreiecke) mit minimalem Gesamtgewicht der Dreiecke berechnen. Gesucht wird ein Algorithmus mit dynamischer Programmierung, der dieses Problem optimal löst.

Für $1 \leqslant i < i + 2 \leqslant j \leqslant n$ bezeichne $L(P_i, P_j)$ das optimale Gesamtgewicht einer Triangulierung des Teilpolygons $(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \ldots, P_j)$.

a) Bestimme $L(P_i, P_{i+2})$ für $i = 1, 2, \ldots, n - 2$.

b) Gib eine Rekursionsgleichung für $L(P_i, P_j)$ für $j \geq i + 3$ an.

c) Welches Teilproblem $L(P_i, P_j)$ ergibt letztendlich den optimalen Wert für das gesamte Polygon?

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3. k-MEDIAN (4 Punkte)

Sei $c = 1+\varepsilon$ für irgendein $0 < \varepsilon < 0.001$. Die folgenden 8 Punkte in der Ebene, mit den gewöhnlichen Euklidschen Distanzen, definieren eine Instanz für das Problem 2-MEDIAN:

$$K = \{A = (0,0), B = (c,0), C = (2c,0), D = (0,1), E = (2c,1), F = (0,2), G = (c,2), H = (2c,2)\}.$$

Finde eine *lokal* optimale Lösung $M \subset K$ für 2-MEDIAN, die nicht global optimal ist. Begründe deine Antwort.

Hinweis: In Berechnungen darf ε vernachlässigt werden, wo seine Größe nicht entscheidend ist.

Aufgabe 6.4. (3 + 3 + 3 Punkte)

a) Skizziere in $\mathbb{R}^2$ (graphisch) die Lösungsmenge des folgenden Linearen Programms:

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\textit{minimiere } c_1 \cdot x + c_2 \cdot y, \text{ sodass}} \\ -x - y & \geq & -7 \\ x - y & \geq & -1 \\ 2x + y & \geq & 4 \end{array}$$

b) Lies von deiner Grafik für die folgenden Werte von c jeweils eine optimale Lösung (falls existent) ab und berechne hierfür den optimalen Zielwert.

i.) $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ii.)* $c = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ *iii.)* $c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Seien $x, x' \in \mathbb{R}^2$ zwei beliebige Punkte. **Beschreibe**, wo sich die folgenden Punkte befinden:

i.) $\dfrac{x + x'}{2}$ *ii.)* $\dfrac{x + 2x'}{3}$ *iii.)* $\lambda x + (1 - \lambda)x'$ für $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`https://ae.cs.uni-frankfurt.de/?p=teaching&s=teaching&t=L_18_WS_APPROX`

E-Mail: `{panni,mahyar}@ae.cs.uni-frankfurt.de`