Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2018/2019

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 5

Ausgabe: 14.11.2018
Abgabe: 21.11.2018

Aufgabe 5.1. *Dynamische Programmierung* (3 + 3 + 2 Punkte)

Ein Chemie-Großhändler bietet Gas in unterschiedlichen Flaschengrößen mit $1 = a_1 < \ldots < a_k$ Litern Inhalt an ($a_i \in \mathbb{N}$). Kunden können in ihren Bestellungen nur das von ihnen benötigte Gas-Volumen $V \in \mathbb{N}$ (in Litern) angeben. Der Händler stellt die Lieferung dann aus den verschiedenen Größen zusammen, so dass genau die gewünschte Menge, und mit Verwendung der *minimalen Anzahl* von Flaschen geliefert wird. Wir möchten das Problem mit Hilfe der dynamischen Programmierung lösen. Für $0 \leq v \leq V$ ($v \in \mathbb{N}$), bezeichne $A_i(v)$ die minimale Anzahl benötigter Flaschen für v Liter, falls nur die kleinsten i Flaschengrößen $(a_1, a_2, \ldots, a_i)$ zur Verfügung stehen.

a) Gib eine Rekursionsgleichung für $A_i(v)$ an, und bestimme die Basisfälle.

b) Gib ein Programm in Pseudocode an, der die minimale Anzahl der (insgesamt) benötigten Flaschen für V Liter berechnet, und bestimme seine asymptotische Laufzeit.

c) Erkläre kurz, wie man das Programm erweitern kann, sodass pro Flaschengröße die benötigte Anzahl ausgegeben wird.

Aufgabe 5.2. Dominating Set (2 + 4 Punkte)

Wir modellieren den d-dimensionalen Würfel als Graphen $W_d(V, E)$, wobei jede Ecke des Würfels einem Knoten in W_d entspricht. Jede Ecke wird dabei durch einen binären Vektor der Länge d dargestellt. Somit gilt $V = \{0, 1\}^d$. Zwei Knoten $x, y \in \{0, 1\}^d$ sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich x und y in exakt einem Eintrag unterscheiden.

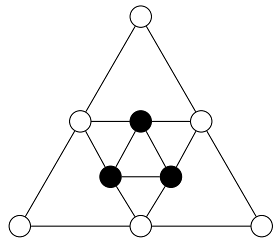
a) Zeige, dass in $W_d(V, E)$ eine dominierende Knotenmenge *(dominating set)* $D \subseteq V$ mindestens $\frac{2^d}{d+1}$ Knoten hat.

b) Konstruiere eine optimale dominierende Knotenmenge D im 4-dimensionalen Würfel W_4. Begründe die Optimalität und die Korrektheit deiner Lösung D.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.3. (3 + 3 Punkte)

Gegeben sind die Ecken von drei verschachtelten gleichseitigen Dreiecken mit den **euklidischen** Distanzen als Eingabeorte wie unten abgebildet.



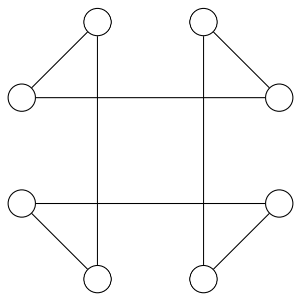
a) Bilden die markierten Orte eine *lokal* optimale Lösung für das 3-CENTER-Problem? Begründe deine Antwort kurz.

b) Bilden die markierten Orte eine *lokal* optimale Lösung für das 3-MEDIAN-Problem? Begründe deine Antwort kurz.

Hinweis: : Betrachte jeweils die 2-Flip Nachbarschaft der angegebenen Lösung.

Aufgabe 5.4. *Lokale Suche für* TSP (2 + 2 + 2 Punkte)

Wir betrachten ein regelmäßiges Achteck als Eingabe für das *euklidische* TSP. Die Anfangslösung y_0 einer lokalen Suche sei wie folgt gegeben:



Finde eine kürzeste *Nachbarlösung* dieser Rundreise in der ...

a) ... 4-Flip-Nachbarschaft von y_0,

b) ... 6-Flip-Nachbarschaft von y_0,

c) ... 8-Flip-Nachbarschaft von y_0.

Hinweis: Eine Begründung der Lösung ist *nicht* erforderlich. Ein $2k$-Flip-Nachbar von y_0 ist jede Lösung, die durch Löschen und Hinzufügen von jeweils k Kanten entsteht.

Die Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter
`https://ae.cs.uni-frankfurt.de/?p=teaching&s=teaching&t=L_18_WS_APPROX`

E-Mail: `{panni,mahyar}@ae.cs.uni-frankfurt.de`