LINEARE PROGRAMMIERUNG

Dualität

Lineare Programme treten in Paaren auf

- Zu jedem LP Minimierungsproblem gehört ein Maximierungsproblem mit der transponierten Matrix A^T (oder umgekehrt)
  so dass jede Lösung y des Maximierungsproblems
  hat einen Zielwert $\leq$ als jeder Zielwert des Minimierungsproblems.
- Es gilt sogar,
  dass die optimalen Zielwerte der beiden gleich sind.

Das duale LP zur Standardform

Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\quad b \in \mathbb{Q}^m \quad c \in \mathbb{Q}^n$

Zu jedem *primalen* LP

(P) minimiere $c^T \cdot x$ so dass $A \cdot x = b \quad x \geq 0$

gehört ein *duales* LP

(D) maximiere $y^T \cdot b$ so dass $y^T \cdot A \leq c$

$(x^T = [x_1, \ldots, x_n], \quad y^T = [y_1, \ldots y_m])$

Beispiel

(P) Minimiere $13x_1 + 10x_2 + 6x_3$

so dass

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(D) Maximiere $8y_1 + 3y_2$

so dass

$$\begin{aligned} 5y_1 + 3y_2 &\leq 13 \\ y_1 + y_2 &\leq 10 \\ 3y_1 &\leq 6 \\ y_1, y_2 &\ \ \text{frei} \end{aligned}$$

Die allgemeine Form von primalen - dualen LPs

Sei a_i^T die i-te Zeile
und a^j die j-te Spalte der Matrix A

$$
\begin{array}{llcl}
\text{minimiere} & c^T \cdot x & & \\
\text{so dass} & & & \\
& a_i^T \cdot x & \geq & b_i \\
& a_i^T \cdot x & \leq & b_i \\
& a_i^T \cdot x & = & b_i \\
& x_j & \geq & 0 \\
& x_j & \leq & 0 \\
& x_j & \text{frei} &
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{array}{llcl}
\text{maximiere} & y^T \cdot b & & \\
\text{so dass} & & & \\
& y_i & \geq & 0 \\
& y_i & \leq & 0 \\
& y_i & \text{frei} & \\
& y^T \cdot a^j & \leq & c_j \\
& y^T \cdot a^j & \geq & c_j \\
& y^T \cdot a^j & = & c_j
\end{array}
$$

$$(c_j - y^T \cdot a^j)\, x_j \geq 0 \qquad \forall j = 1..n$$

$$y_i\, (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0 \qquad \forall i = 1..m$$

Beobachtungen (ohne Beweis)

Beobachtung 1: Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beobachtung 2: Wenn wir (P) in ein äquivalentes LP (P')
transformieren zB. durch

- die Ersetzung $x_i = x_i^+ - x_i^-$
- die Einführung von Slackvariablen
- die Eliminierung von linear abhängigen Gleichungen $a_i^T \cdot x = b_i$

dann ist auch das duale LP (D') äquivalent mit (D)

Wie oben gesehen...

Für (P) und das duale (D) stets gilt, dass
für jede Spalte $j = 1, \ldots n$

$$(c_j - y^T \cdot a^j)\, x_j \geq 0$$

und für jede Zeile $i = 1, \ldots m$

$$y_i\, (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0.$$

Durch Summieren über j bzw. i ergibt dies

$$(c^T - y^T \cdot A) \cdot x \geq 0$$

$$y^T \cdot (A \cdot x - b) \geq 0$$

Wir addieren die beiden Ungleichungen, und erhalten den schwachen Dualitätssatz:

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b \geq 0.$$

Schwacher Dualitätssatz

Theorem: Wenn x eine Lösung des (primalen) Minimierungs-LP, und y eine Lösung des (dualen) Maximierungs-LP ist, dann gilt

$$y^T \cdot b \leq c^T \cdot x$$

Korollar 1: Wenn für Lösungen x und y des primalen bzw. des dualen Programms $y^T \cdot b = c^T \cdot x$ gilt, dann sind x und y optimale Lösungen.

Korollar 2: Wenn das Minimum des (P) $-\infty$ ist, dann ist (D) unlösbar.

Wenn das Maximum des (D) ∞ ist, dann ist (P) unlösbar.

Starke Dualität

<u>Theorem:</u> Wenn ein Minimierungs-LP eine optimale Lösung x^* hat, dann hat sein duales LP auch eine optimale Lösung y^*, und

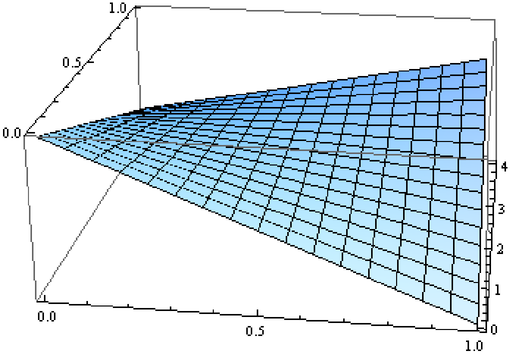
$$y^{*T} \cdot b = c^T \cdot x^*$$

Umgekehrt gilt analog.

Illustration

$$y^{*T} \cdot b = \max_y \min_x \left(y^T b + c^T x - y^T A x\right)$$
$$c^T \cdot x^* = \min_x \max_y \left(y^T b + c^T x - y^T A x\right)$$

Für lineare Funktion f gilt $\max_y \min_x f(x, y) = \min_x \max_y f(x, y)$.



Graph von $f(x, y) = by + cx - axy$ (https://stackoverflow.com/; Suche auch 'bilinear', oder 'hiperbolic paraboloid')

Beispiel: SET COVER

(Die Elemente $\{1, \ldots, m\}$ sind minimal zu überdecken; die Teilmenge S_j hat Gewicht w_j
$x_j = 1 \Leftrightarrow S_j \, \mathrm{in\, der\, Ueberdeckung} \, \Leftrightarrow j \in C$)

LP-Formulierung:

(P) $\quad \mathrm{minimiere} \sum w_j x_j$ so dass

$$\sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1 \qquad i \in \{1, \ldots, m\}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j \in \{1, \ldots, n\}$$

A ist die Inzidenzmatrix des Mengensystems, $b^T = [1, 1, \ldots, 1]$ und $c^T = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$.

Das duale LP für SET COVER:

(D) $\quad$ maximiere $\sum y_i$ so dass

$$\sum_{i \in S_j} y_i \leq w_j \qquad j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$y_i \geq 0 \qquad i \in \{1, \ldots, m\}$$

- die Bedingung 'überdecke i' für jedes Element i entspricht einer dualen Variable y_i
- die Variable x_j für jede Teilmenge S_j entspricht der dualen Bedingung $\sum_{i \in S_j} y_i \leq w_j$

Die y_i kann als die *Mindest*kosten (untere Schranke) der Überdeckung des Element i aufgefasst werden.

Komplementäre Slackness

$$(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j \geq 0 \qquad \forall j, \qquad y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0 \qquad \forall i.$$

Summiert

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b = \sum_j (c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j + \sum_i y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0$$

Theorem: x und y sind *beide* optimale Lösungen $\Leftrightarrow$

Es gelten die primalen komplementäre Slackness (PKS)

$$(c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots n$$

und die dualen komplementäre Slackness (DKS) Bedingungen

$$y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots m$$

Warum?
Die Lösungen x und y sind genau dann optimal für (P) bzw. (D) wenn

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b = 0.$$

Dies passiert genau dann, wenn oben überall $=$ stehen.

Primal-Dual Algorithmus für SET COVER:

- Seien $x = 0$ und $y = 0$ (x ist noch keine Überdeckung)

- WHILE $\exists k \in \{1, \dots, m\}$ nicht überdeckt DO
  - erhöhe y_k bis für eine Menge S_j gilt $\sum_{i \in S_j} y_i = w_j$

    (Beachte: dies kann nur mit Mengen passieren die k enthalten; sonst ist $a_{kj} = 0$, und die Erhöhung des y_k bewirkt nichts.)

  - setze $x_j = 1$ d.h. sei $j \in C$

Laufzeit: es gibt maximal m Iterationen

Primal-Duale Algorithmen allgemein

Es liegt die LP-Formulierung oder die LP-Relaxierung eines (schwierigen) Optimierungsproblem vor.

Seien

$$(P) \qquad \min c^T \cdot x \qquad A \cdot x \geq b, \qquad x \geq 0$$

$$(D) \qquad \max y^T \cdot b \qquad y^T \cdot A \leq c^T \qquad y \geq 0$$

Wir nehmen $c \geq 0$ an.

Eine mögliche Struktur:

- Seien $x = 0$ und $y = 0$ (x ist keine Lösung von (P), aber y ist eine Lösung von (D) und die primalen komplementäre Slackness Bedingungen (PKS) gelten)
- WHILE x keine Lösung ($\exists$ *unerfüllte* Bedingung $a_i^T \cdot x \geq b_i$) DO
  - erhöhe eine oder mehrere Komponenten von y bis eine (weitere) duale Ungleichung *exakt* erfüllt wird $c_j = y^T \cdot a^j$
  - setze x_j (ganzzahlig) so dass eine (weitere) Bedingung $a_i^T \cdot x \geq b$ gilt.

Approximation und relaxierte Komplementäre Slackness

Stets gilt:

$$c^T \cdot x - y^T \cdot b = \sum_j (c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j + \sum_i y_i \cdot (a_i^T \cdot x - b_i) \geq 0$$

Theorem: x ist eine α-approximative Lösung wenn

Es gelten die primalen komplementäre Slackness (PKS)

$$x_j = 0 \qquad oder \qquad y^T \cdot a^j = c_j \quad \forall j = 1, \ldots n$$

und die relaxierten dualen komplementäre Slackness (DKS) Bedingungen

$$y_i = 0 \qquad oder \qquad a_i^T \cdot x \leq \alpha b_i \qquad \forall i = 1, \ldots m$$

Warum?

$$c^T \cdot x - \alpha \cdot y^T \cdot b = \sum_j (c_j - y^T \cdot a^j) \cdot x_j + \sum_i y_i \cdot (a_i^T \cdot x - \alpha \cdot b_i) \leq 0$$

$$c^T \cdot x \leq \alpha \cdot y^T \cdot b \leq \alpha \cdot OPT_{frac} \leq \alpha OPT_{ganz}$$

Zusammenfassung:

– Primal-Duale Algorithmen sind schnell, und *es brauchen keine LP-s gelöst zu werden*.

– Primal-Duale Algorithmen nutzen die kombinatorische Struktur des gegebenen Problems aus;

– Es gibt Primal-Duale Algorithmen für Netzwerkfluss-, Matching-, Shortest Path-, Steiner-Baum-, Facility Location-, k-Median-Probleme, etc. Für Probleme in $\mathcal{P}$ gibt es exakte P-D Algorithmen. (Siehe Shmoys und Vazirani.)

– P-D Algorithmen führen oft zu/entsprechen rein kombinatorischen Algorithmen (ohne LP).